

⑥ Linear Diferansiyel Denklemler

y bağımlı, x bağımsız değişkenli birinci mertebeden bir **linear diferansiyel denklem**, $P(x)$ & $Q(x)$ sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \quad \dots (2.14)$$

formunda yazılabilen bir denklemdir. x bağımlı, y bağımsız değişkenli bir linear denklem

$$\frac{dx}{dy} + P(y)x = Q(y) \quad \dots (2.15)$$

formundadır

(2.14) denlemi

$$(P(x)y - Q(x))dx + dy = 0$$

diferansiyel formda yazılırsa

$$\begin{aligned} M(x,y) &= P(x)y - Q(x) \\ N(x,y) &= 1 \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} M_y &= P(x) \\ N_x &= 0 \end{aligned} \right\} M_y \neq N_x \text{ olduğundan}$$

denklem tam değildir.

$$\frac{My - Nx}{N} = P(x)$$

dup x e bağılı o bugünden integral carpanı $\lambda(x) = e^{\int P(x) dx}$ olur.
0 halde

$$e^{\int P(x) dx} (P(x)y - Q(x)) dx + e^{\int P(x) dx} dy = 0$$

tam diferansiyel denklemdir. Gruplama yöntemi ile

$$e^{\int P(x) dx} P(x)y dx + e^{\int P(x) dx} dy = e^{\int P(x) dx} Q(x) dx$$

$$d(y e^{\int P(x) dx}) = e^{\int P(x) dx} Q(x) dx$$

yazılır integral alınarak genel çözüm

$$y e^{\int P(x) dx} = \int e^{\int P(x) dx} Q(x) dx + C$$

$$\Rightarrow y = e^{-\int P(x) dx} \left(\int e^{\int P(x) dx} Q(x) dx + C \right)$$



Scanned with
CamScanner

→ $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ lineer denklemleri için $\lambda(x) = e^{\int P(x) dx}$

olmak üzere genel çözüm $y = \frac{1}{\lambda(x)} \left(\int \lambda(x) Q(x) dx + c \right)$ şeklindedir.

→ Lineer denklem $\frac{dx}{dy} + P(y)x = Q(y)$ formunda ise

$\lambda(y) = e^{\int P(y) dy}$ olmak üzere genel çözüm $x = \frac{1}{\lambda(y)} \left(\int \lambda(y) Q(y) dy + c \right)$

şeklindedir.

Örnek: $xy' + 2y = x^3$ denkleminin çözümlerini bulunuz.

Denklem x ile bölünürse

$$y' + \frac{2}{x}y = x^2$$

lineer denklemi elde edilir. $P(x) = \frac{2}{x}$, $Q(x) = x^2$ dir.

$$\lambda(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\ln x} = x^2 \text{ olmak üzere}$$

$$\lambda(x)y = \int \lambda(x)Q(x)dx + C$$

genel çözüm formülünden

$$x^2y = \int x^2 \cdot x^2 dx + C$$

$$x^2y = \frac{x^5}{5} + C$$

Çözümü bulunur.

Örneği $dx - 2y(x + e^{y^2})dy = 0$ denkleminin çözümünü bulunuz.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2y(x + e^{y^2})} \text{ linear formda değildir.}$$

$$\frac{dx}{dy} = 2y(x + e^{y^2}) \Rightarrow \frac{dx}{dy} - 2yx = 2ye^{y^2} \text{ linear denklemdir}$$

$$P(y) = -2y, \quad Q(y) = 2ye^{y^2} \text{ dir. Bu durumda}$$

$$Q(y) = e^{\int P(y)dy} = e^{\int -2ydy} = e^{-y^2} \text{ olup genel çözüm}$$

$$Q(y) \cdot x = \int Q(y)P(y)dy + C$$

$$e^{-y^2} \cdot x = \int e^{-y^2} 2ye^{y^2} dy + C$$

$$e^{-y^2} \cdot x = \int 2y dy + C$$

$$e^{-y^2} \cdot x = y^2 + C$$

Örneği: $\cos x y' + y \sin x = 1$ denkleminin çözümünü buluyoruz.

$$y' + \frac{\sin x}{\cos x} y = \frac{1}{\cos x} \quad \text{dip lineer denklemdir.}$$

$$P(x) = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad Q(x) = \frac{1}{\cos x} \quad \text{olmak üzere}$$

$$\lambda(x) = e^{\int P(x) dx} = e^{\int \frac{\sin x}{\cos x} dx} = e^{-\ln(\cos x)} = (\cos x)^{-1} = \frac{1}{\cos x}$$

dip genel çözüm

$$\lambda(x) y = \int \lambda(x) Q(x) dx + C$$

$$\frac{1}{\cos x} y = \int \frac{1}{\cos x} \frac{1}{\cos x} dx + C$$

$$\frac{1}{\cos x} y = \int \sec^2 x dx + C$$



Scanned with
CamScanner

$$\frac{1}{\cos x} y = \tan x + C \Rightarrow y = \sin x + C \cos x \quad \text{bulunur.}$$

-104-

Örnek: $(2y \sin x - 1)dx - \cos x dy = 0$ denkleminin çözümünü bulunuz.

1.yol: $\frac{dy}{dx} = \frac{2y \sin x - 1}{\cos x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} - \frac{2 \sin x}{\cos x} y = -\frac{1}{\cos x}$ linear denklem

dup $\lambda(x) = e^{\int -\frac{2 \sin x}{\cos x} dx} = e^{2 \ln \cos x} = (\cos x)^2 = \cos^2 x$ olmak üzere
genel çözüm

$$(\cos^2 x)y = \int -\frac{1}{\cos x} \cdot \cos^2 x dx + c \Rightarrow (\cos^2 x)y = -\sin x + c \text{ dur}$$

2.yol: $M(x,y) = 2y \sin x - 1$ $M_y = 2 \sin x$ $M_y \neq N_x$ dup denklem tam
 $N(x,y) = -\cos x$ $N_x = \sin x$ değildir. $\int -\frac{\sin x}{\cos x} dx = \ln \cos x$
 $\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{2 \sin x - \sin x}{-\cos x} = -\frac{\sin x}{\cos x}$ olup $\lambda(x) = e^{\int -\frac{\sin x}{\cos x} dx} = e^{\ln \cos x} = \cos x$
 $\Rightarrow \lambda(x) = \cos x$

integral garpandır. Bu durumda

$$(2y \sin x \cos x - \cos x) dx - \cos^2 x dy = 0 \text{ tam diferensiyel denklemdir.}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2y \sin x \cos x - \cos x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\cos^2 x \text{ dıcaz ekle}$$



Scanned with
CamScanner

fonksiyonu vardır bunu bulalım?

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\cos^2 x \Rightarrow u(x,y) = -\int \cos^2 x \, dy + h(x)$$

$$\Rightarrow u(x,y) = -\cos^2 x \, y + h(x) \text{ dur.}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -2\cos x \cdot (-\sin x)y + h'(x) \text{ ve } \frac{\partial u}{\partial x} = 2y\sin x \cos x - \cos x$$

olduğundan

$$2\sin x \cos x \cdot y + h'(x) = 2y\sin x \cos x - \cos x$$

$$h'(x) = -\cos x$$

$$h(x) = -\sin x \text{ bulunur.}$$

$$u(x,y) = -\cos^2 x \, y - \sin x \text{ olduğundan } u(x,y) = c \text{ genel}$$

çözümü

$$(\cos^2 x)y + \sin x = c$$

denklemler bulunur.



Denklemin lineer olduğu görülürse çözümü daha kolay

etilebilir.



Scanned with
CamScanner

Örnek: $y' = y(e^x + \ln y)$ denkleminin çözümünü bulunuz

$\frac{dy}{dx} = y(e^x + \ln y)$ tam diferansiyel değildir, integral
kaymanı da yoktur, lineer değildir.

⊕ Uygun bir dönüşüm yapalım:

$$\frac{y'}{y} = e^x + \ln y$$

$\ln y = u$, $u = u(x)$ dersek $\frac{y'}{y} = u'$ olur. Böylece denklemin

$u' = e^x + u \Rightarrow u' - u = e^x$ lineer denklemine indirgenir.

$P(x) = -1$, $Q(x) = e^x$ olmak üzere

$Q(x) = e^{\int P(x) dx} = e^{\int -1 dx} = e^{-x}$ olup lineer denklemin

çözümü

$$e^x \cdot u = \int e^x \cdot e^x dx + c \Rightarrow e^x u = x + c \text{ olur.}$$

$u = \ln y$ yazılırsa istenen genel çözüm

$$e^x \ln y = x + c$$



Scanned with
CamScanner

olarak bulunur.

Örnek: $\cos y \cdot y' + \sin y + x^2 + 2x = 0$ denkleminin çözümünü bulunuz.

$\sin y = u$, $u = u(x)$ dersek $y' \cos y = u'$ olur. Denklemin

$u' + u + x^2 + 2x = 0 \Rightarrow u' + u = -x^2 - 2x$ lineer denlemine indirgenir.

$P(x) = 1$, $Q(x) = -x^2 - 2x$ için $\lambda(x) = e^{\int 1 dx} = e^x$ olup lineer denklemin çözümü

$$e^x \cdot u = \int e^x (-x^2 - 2x) dx + c$$

$$e^x u = -\int x^2 e^x dx - \int 2x e^x dx + c \quad x^2 = t \quad e^x dx = dt$$

$$e^x u = -x^2 e^x + \int 2x e^x dx - \int 2x e^x dx + c \quad 2x dx = dt \quad v = e^x$$

$$e^x u = -x^2 e^x + c$$

dur. $u = \sin y$ yazılırsa istenen çözüm $e^x (\sin y + x^2) = c$ bulunur.

→ İntegral çarpanı yöntemiyle de çözümü bulunur.



Scanned with
CamScanner

⑦ Bernoulli Diferansiyel Denklemi

P ve Q sürekli fonksiyonlar ve $n \neq 0, n \neq 1$ reel sayı olmak üzere y bağımlı, x bağımsız değişkenli

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \quad \dots (2.16)$$

diferansiyel denkleminde **Bernoulli diferansiyel denklemi** denir. x bağımlı y bağımsız değişken olması halinde

$$\frac{dx}{dy} + P(y)x = Q(y)x^n \quad \dots (2.17)$$

yine bir Bernoulli diferansiyel denklemdir.

$$n=0 \text{ ise } \frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \text{ lineer denklemdir}$$

$$n=1 \text{ ise } \frac{dy}{dx} = (Q(x) - P(x))y \Rightarrow \frac{dy}{y} = (Q(x) - P(x))dx \text{ değişkenler ayrılabilir denklemdir}$$

Teorem: (2.16) Bernoulli diferansiyel denklemi $u = y^{1-n}$ dönüşümü ile x bağımsız, u bağımlı değişkenli bir linear denkleme indirgenir.

İspat: (2.16) Bernoulli denkleminin her bir terimi y^n ile bölünürse

$$\bar{y}^n y' + p(x) y^{1-n} = Q(x)$$

dur.

$$u = y^{1-n} \text{ denirse } u' = (1-n) \bar{y}^{-n} y' \text{ olup buradan}$$

$$\frac{u'}{(1-n)} + p(x) u = Q(x) \Rightarrow u' + (1-n) p(x) u = (1-n) Q(x) \text{ linear}$$

denklemi elde edilir. Bilinen yöntemle linear denklem çözülüp $u = y^{1-n}$ yazılırsa Bernoulli denkleminin genel çözümü bulunmuş olur.



Örnek: $xy' - y = \frac{x+1}{y}$ denkleminin çözümünü bulunuz.

Denklem düzenlenirse

$$y' - \frac{1}{x}y = \frac{x+1}{x} y^{-1} \quad \text{olup} \quad P(x) = -\frac{1}{x}, \quad Q(x) = \frac{x+1}{x}, \quad n = -1 \text{ den}$$

Bernoulli denklemdir.

$$u = y^{1-n} = y^{1-(-1)} = y^2 \quad \text{dönüştürme yaparsak} \quad u' = 2yy' \text{ olur.}$$

Bernoulli denklemini $y' = y^{-1}$ ile bölünürse

$$yy' - \frac{1}{x}y^2 = \frac{x+1}{x} \quad \text{olup buradan}$$

$$\frac{u'}{2} - \frac{1}{x}u = \frac{x+1}{x} \Rightarrow u' - \frac{2}{x}u = 2\frac{(x+1)}{x} \quad \text{lineer denklemdir}$$

$$\text{elde edilir. } \lambda(x) = e^{\int -\frac{2}{x} dx} = e^{-2 \ln x} = x^{-2} = \frac{1}{x^2} \quad \text{olmak üzere}$$

lineer denklemin çözümü



Scanned with
CamScanner

$$\frac{1}{x^2} u = \int \frac{1}{x^2} \cdot \frac{2(x+1)}{x} dx + c$$

$$\frac{1}{x^2} u = 2 \int \frac{1}{x^2} \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx + c$$

$$\frac{1}{x^2} u = 2 \int \frac{1}{x^2} dx + 2 \int \frac{1}{x^3} dx + c$$

$$\frac{1}{x^2} u = -\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + c$$

$$u = -2x - 1 + cx^2$$

dur. $u = y^2$ yazılırsa $y^2 + 2x + 1 = cx^2$ genel çözümleri bulunur.

→ Dönüşüm sonrası $u' + (1-n)P(x)u = (1-n)Q(x)$

linear denklem formundan kolaylıkla

$$n = -\frac{1}{x}, P(x) = -\frac{1}{x}, Q(x) = \frac{x+1}{x} \text{ için}$$



Scanned with
CamScanner

$$u' + \frac{2}{x}u = \frac{2(x+1)}{x}$$

linear denklemi yazılabilir.

Not: $\frac{dx}{dy} + P(y)x = Q(y)x^n$ formundaki Bernoulli denklemini için

$u = x^{1-n}$ dönüşümü uygularsa $u' + (1-n)P(y)u = (1-n)Q(y)$ lineer denklemini elde edilir.

Örnek: $dx - (2xy^1 + x^4)dy = 0$ denkleminin çözümünü bulunuz.

$$\frac{dx}{dy} = 2\frac{x}{y} + x^4 \Rightarrow \frac{dx}{dy} - \frac{2}{y}x = x^4 \quad \text{Bernoulli denklemdir}$$

$P(y) = -\frac{2}{y}$, $Q(y) = 1$, $n = 4$ olduğundan $u = x^{1-4} = x^{-3}$ dönüşümü yapılır.

$u' + (1-3)(-\frac{2}{y})u = (1-3)1 \Rightarrow u' + \frac{6}{y}u = -3$ lineer denklemini elde edilir.

$\lambda(y) = e^{\int \frac{6}{y} dy} = e^{6 \ln y} = y^6$ diye çarparsak lineer denklemin çözümü

$$y^6 \cdot u = \int -3y^6 dy + c \Rightarrow y^6 u = -3 \frac{y^7}{7} + c \quad \text{olur.}$$

$u = \frac{1}{x^3}$ yazılırsa $\frac{y^6}{x^3} + \frac{3y^7}{7} = c$ genel çözümü bulunur.

Not: 1) $B'(y) \frac{dy}{dx} + P(x) B(y) = Q(x) (B(y))^n$ formundaki denklemler

için $u = B(y)$ dönüşümü yapılırsa $u' = B'(y) y'$ olduğundan denklem

$$u' + P(x)u = Q(x)u^n$$

Bernoulli denklemine dönüştürülüp, çözülür.

2) $B'(x) \frac{dx}{dy} + P(y) B(x) = Q(y) (B(x))^n$ formundaki denklemler için

$u = B(x)$ dönüşümü yapılırsa $u' = B'(x) x'$ $\left(\frac{du}{dy} = B'(x) \frac{dx}{dy} \right)$ olduğundan denklem

$$u' + P(y)u = Q(y)u^n$$

Bernoulli denklemine dönüştürülüp, çözülür.



Scanned with
CamScanner

Örnek: $y' \cos y + \frac{\sin y}{x} = (x+1)(1-\cos^2 y)$ denklemini gözünüz.

$u = \sin y$ derseniz $u' = y' \cos y$ olur.

$$y' \cos y + \frac{\sin y}{x} = (x+1) \sin^2 y$$

$u' + \frac{1}{x} u = (x+1) u^2$ Bernoulli denklemdir.

$P(x) = \frac{1}{x}$, $Q(x) = x+1$, $n=2$ için $v = u^{1-n} = u^{-1}$ dönüşümü

ile Bernoulli denklemdir

$$v' + (1-n)P(x)v = (1-n)Q(x)$$

elde ettiğimiz

$$v' - \frac{1}{x} v = -(x+1)$$

lineer denkleme indirgenir. Buradan $\lambda(x) = e^{\int -\frac{1}{x} dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$

denklemin lineer denklemin çözümü

$$\frac{1}{x} v = \int \frac{1}{x} (x+1) dx + c \Rightarrow \frac{1}{x} v = -x - \ln x + c \text{ olur.}$$

$v = \frac{1}{u} = \frac{1}{\sin y}$ için genel çözüm $\frac{1}{x \sin y} = -x - \ln x + c$ bulunur.

Örnek: $2x \frac{dx}{dy} + \frac{x^2+1}{y} = \frac{(x^2+1)^2}{y+1}$ denkleminin çözümünü bulunuz.

$B'(x) \frac{dx}{dy} + P(y) B(x) = Q(y) (B(x))^2$ formundadır.

$u = x^2 + 1$ derseniz $u' = 2x x'$ olur. $\left(\frac{du}{dy} = 2x \frac{dx}{dy} \right)$ olarak

$u' + \frac{1}{y} u = \frac{1}{y+1} u^2$ Bernoulli denklemini elde edilir.

$P(y) = \frac{1}{y}$, $Q(y) = \frac{1}{y+1}$, $n=2$ için $v = u^{1-n} = u^{-1}$ dönüşümü ile

$$v' - \frac{1}{y} v = -\left(\frac{1}{y+1}\right)$$

lineer denklemini elde edilir Buradan $Q(y) = e^{\int -\frac{1}{y} dy} = e^{-\ln y} = \frac{1}{y}$ densen üzere
lineer denklemin çözümü

$$\frac{1}{y} v = \int -\frac{1}{y} \frac{1}{y+1} dy + c \Rightarrow \frac{1}{y} v = \int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+1} \right) dy + c$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y} v = -\ln y + \ln(y+1) + c$$



Scanned with
CamScanner

olur.

$v = u^{-1}$ ve $u = x^2 + 1$ yerine yazılırsa verilen denklemin
genel çözümü

$$\frac{1}{y(x^2+1)} = \ln\left(\frac{y-1}{y}\right) + C$$

şeklinde bulunur.

⑧ Riccati Diferansiyel Denklemleri

P, Q, R sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^2 + R(x) \text{ --- (2.18)}$$

formundaki denklemlere **Riccati diferansiyel denklemleri** denir.

(2.18) de $R(x) = 0$ ise denklem Bernoulli denklemleri,

$Q(x) = 0$ ise denklem lineer denklem olur.

Riccati denkleminin çözümü çoğunlukla temel fonksiyonlarla ifade edilemez. Ancak en az bir özel çözümü belli ise denklemini Bernoulli veya lineer denkleme dönüştürerek çözümü bulunabilir.

Teorem: $y_1(x)$, Riccati denkleminin bir özel çözümünü olsun. Riccati denkleminin

i) $y = y_1(x) + z(x)$ dönüşümü ile Bernoulli denklemine,

ii) $y = y_1(x) + \frac{1}{u(x)}$ dönüşümü ile linear denkleme dönüşür.

İspat: i) $y_1(x)$ çözüm olduğundan denklemi sağlar yani $y_1' + P(x)y_1 = Q(x)y_1^2 + R(x)$ sağlanır.

$y = y_1(x) + z(x)$ için $y' = y_1' + z'$ olduğundan denklem

$$y_1' + z' + P(x)(y_1 + z) = Q(x)(y_1 + z)^2 + R(x)$$

$$\Rightarrow \cancel{y_1'} + z' + \cancel{P(x)y_1} + P(x)z = \cancel{Q(x)y_1^2} + 2y_1zQ(x) + z^2Q(x) + \cancel{R(x)}$$

$$\Rightarrow z' + (P(x) - 2y_1Q(x))z = Q(x)z^2$$

şeklinde Bernoulli denklemini elde edilir.

ii) Yine $y_1(x)$ çözüm olduğundan $y_1' + P(x)y_1 = Q(x)y_1^2 + R(x)$ sağlanır.

$$y = y_1(x) + \frac{1}{u(x)} \quad \text{in} \quad y' = y_1' - \frac{u'}{u^2} \quad \left(\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx} - \frac{1}{u^2} \frac{du}{dx} \right)$$

$$y_1' - \frac{u'}{u^2} + P(x) \left(y_1 + \frac{1}{u} \right) = Q(x) \left(y_1 + \frac{1}{u} \right)^2 + R(x)$$

$$\cancel{y_1'} - \frac{u'}{u^2} + \cancel{P(x)y_1} + P(x)\frac{1}{u} = \cancel{Q(x)y_1^2} + \frac{2y_1}{u} Q(x) + \frac{1}{u^2} Q(x) + \cancel{P(x)}$$

$$-\frac{u'}{u^2} + \left(P(x) - 2y_1 Q(x) \right) \frac{1}{u} = \frac{1}{u^2} Q(x)$$

$$u' + (2y_1 Q(x) - P(x)) u = -Q(x)$$

şeklinde lineer denklem elde edilir.

→ Çözümü bulmak için $y = y_1(x) + \frac{1}{u(x)}$ dönüşümünü

kullanarak denklemi lineer denkleme indirgemek işlem

kolaylığı sağlar.



Scanned with
CamScanner

Örneğin $y' - 2(x-1)y = -y^2 - x^2 + 2x + 1$ denkleminin bir özel
çözümünü $y_1 = x$ ise genel çözümü bulunuz.

$$y' - \underbrace{2(x-1)}_{P(x)} y = \underbrace{-y^2}_{Q(x)} - \underbrace{x^2 + 2x + 1}_{R(x)} \quad \text{Riccati denklemdir.}$$

$$y = y_1 + \frac{1}{u} = x + \frac{1}{u} \quad \text{denüşümü ile} \quad y' = 1 - \frac{u'}{u^2} \quad \text{olup}$$

$$1 - \frac{u'}{u^2} - 2(x-1)\left(x + \frac{1}{u}\right) = -\left(x + \frac{1}{u}\right)^2 - x^2 + 2x + 1$$

$$1 - \frac{u'}{u^2} - 2x^2 + 2x - \frac{2x}{u} + \frac{2}{u} = -x^2 - \frac{2x}{u} - \frac{1}{u^2} - x^2 + 2x + 1$$

$$-\frac{u'}{u^2} + \frac{2}{u} = -\frac{1}{u^2} \Rightarrow u' - 2u = 1$$

lineer denkleme eklenir. $\lambda(x) = e^{\int -2dx} = e^{-2x}$ olmak üzere çözümü
 $e^{2x} u = \int 1 \cdot e^{2x} dx + c \Rightarrow e^{2x} u = \frac{1}{2} e^{2x} + c \quad \text{olur.}$



Scanned with
CamScanner

$$y = x + \frac{1}{u} \Rightarrow u = \frac{1}{y-x} \quad \text{den}$$

$$\frac{1}{y-x} = -\frac{1}{2} + ce^{2x}$$

İstenen
çözümüdür.
- 121 -

Örnek: $\frac{dy}{dx} + e^x - 3y + e^x y^2 = 0$ denkleminin bir özel çözümü $y_1 = e^x$ olduğuna göre genel çözümü bulunuz.

$$y' - 3y = -e^x y^2 - e^x \quad \text{Riccati denklemdir.}$$

$$y = y_1 + \frac{1}{u} = e^x + \frac{1}{u} \quad \text{denüşümü ile } y' = e^x - \frac{u'}{u^2} \text{ olur.}$$

Buradan

$$e^x - \frac{u'}{u^2} + e^x - 3(e^x + \frac{1}{u}) + e^x(e^x + \frac{1}{u})^2 = 0$$

$$-\frac{u'}{u^2} - \frac{1}{u} + \frac{e^{-x}}{u^2} = 0 \Rightarrow u' + u = e^{-x} \quad \text{lineer denklemdir}$$

çözümler

$$\lambda(x) = e^{\int 1 dx} = e^x \quad \text{olmak üzere lineer denklemin çözümü}$$

$$e^x u = \int e^{-x} e^x dx + c \Rightarrow e^x u = x + c \quad \text{dur.}$$

$$y = e^x + \frac{1}{u} \quad \text{olduğundan } u = \frac{1}{y - e^x} \quad \text{yerine yazılırsa istenen}$$



Scanned with CamScanner $\frac{e^x}{y - e^x} = x + c$ olarak bulunur.

Örnek: $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ şeklinde üç özel çözümü bilinen Riccati denklemini kurunuz.

Bu üç çözüm Riccati denklemini sağladığı için

$$y' + P(x)y = Q(x)y^2 + R(x)$$

$$y_1' + P(x)y_1 = Q(x)y_1^2 + R(x)$$

$$y_2' + P(x)y_2 = Q(x)y_2^2 + R(x)$$

$$y_3' + P(x)y_3 = Q(x)y_3^2 + R(x)$$

yazılabilir. Bu sistemden P, Q, R nin yok edilmesi gerekir ve gerekir

$$\Delta = \begin{vmatrix} y' & y & y^2 & 1 \\ y_1' & y_1 & y_1^2 & 1 \\ y_2' & y_2 & y_2^2 & 1 \\ y_3' & y_3 & y_3^2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

olması ile mümkün olduğundan $\Delta = 0$ aranan Riccati denklemdir.



Örnek: $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ iki özel çözümü bilinen Riccati denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Riccati denklemini $y' = Q(x)y^2 - P(x)y + R(x)$ yazılırsa ve y_1 ve y_2 özel çözüm olduğundan

$$y_1' = Q(x)y_1^2 - P(x)y_1 + R(x)$$

$$y_2' = Q(x)y_2^2 - P(x)y_2 + R(x) \quad \text{yazılır. Buradan}$$

$$y' - y_1' = Q(x)(y^2 - y_1^2) - P(x)(y - y_1)$$

$$y' - y_2' = Q(x)(y^2 - y_2^2) - P(x)(y - y_2)$$

e ile edilir. Buradan birincisi $\frac{1}{y-y_1}$, ikincisi $\frac{1}{y-y_2}$ ile çarpılıp taraf tarafa alınır ve düzenlenirse

$$\frac{y' - y_1'}{y - y_1} - \frac{y' - y_2'}{y - y_2} = (y_1 - y_2)Q(x)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\ln \frac{y - y_1}{y - y_2} \right) = (y_1 - y_2)Q(x)$$

$$\int (y_1 - y_2)Q(x) dx$$

$$\frac{y - y_1}{y - y_2} = c e$$

çözümü bulunur.

$$= \int (y_1 - y_2)Q(x) dx + c \Rightarrow$$

Örnek: $y(x) = \frac{k}{x}$, k nin iki farklı değeri için $x^2(y' + y^2) = 2$ denkleminin çözümleridir. Bu çözümleri kullanarak denklemin genel çözümlerini bulunuz.

$y(x) = \frac{k}{x}$ çözüm ise denklemin sağlanır. $y' = -\frac{k}{x^2}$ olduğundan

$$x^2\left(-\frac{k}{x^2} + \frac{k^2}{x^2}\right) = 2 \Rightarrow -k + k^2 = 2 \Rightarrow k^2 - k - 2 = 0 \Rightarrow k = 2 \text{ veya } k = -1$$

Böylece özel çözümler $y_1(x) = \frac{1}{x}$ ve $y_2(x) = \frac{2}{x}$ dir.

Denklem düzenlenirse

$$y' + y^2 = \frac{2}{x^2} \Rightarrow y' = -y^2 + \frac{2}{x^2} \text{ Riccati denklemdir.}$$

$P(x) = 0$, $Q(x) = -1$, $R(x) = \frac{2}{x^2}$ dir. İki özel çözüme bilinen

Riccati denkleminin genel çözümü

$$\frac{y - y_1}{y - y_2} = C e^{\int (y_1 - y_2) Q(x) dx} \Rightarrow \frac{y + \frac{1}{x}}{y - \frac{2}{x}} = C \cdot e^{\int \left(-\frac{1}{x} - \frac{2}{x}\right) (-1) dx}$$

$$\Rightarrow \frac{xy + 1}{x^2 - 2} = C x^3 \text{ şeklindedir.}$$



Scanned with
CamScanner